

**TD N° 5 : Processus à temps continu**

**EXERCICE 1.** Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$  et soit  $T_1 = \inf\{t \geq 0 : X_t = 1\}$ . Soit  $s \geq 0$  une date fixée. Déterminer la loi de  $T_1 | (X_s = 1)$ .

**EXERCICE 2.** Une compagnie d'assurance modélise suppose que les accidents de la circulation surviennent suivant un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$ , inconnue en pratique. Etant donné l'historique  $(N_t)_{t \in [0, T]}$ , elle propose d'estimer  $\lambda$  par  $\hat{\lambda}_T = N_T/T$ . Etudier la convergence de cet estimateur.

**EXERCICE 3.** Soit  $(N_t)_{t \in [0, T]}$  un processus de Markov (homogène), à trajectoires càdlàg, vérifiant les trois propriétés suivantes :

- ( $\alpha$ ) accroissements indépendants :  $t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4 \Rightarrow N_{t_4} - N_{t_3}$  indep. de  $N_{t_2} - N_{t_1}$  ;
- ( $\beta$ )  $\mathbb{P}(N_{t+h} - N_t = 1) = \lambda h + o(h)$  lorsque  $h$  est au voisinage de 0 ;
- ( $\gamma$ )  $\mathbb{P}(N_{t+h} - N_t > 1) = o(h)$ .

On note  $p_k(t) = \mathbb{P}(N_t = k)$ .

- 1) Montrer que  $p'_0(t) = -\lambda p_0(t)$  et en déduire la valeur de  $p_0(t)$ .
- 2) Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  on a :

$$p'_{k+1}(t) = \lambda p_k(t) - \lambda p_{k+1}(t).$$

- 3) Par récurrence, en déduire la valeur de  $p_k(t)$  et conclure que  $(N_t)$  est un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$ .

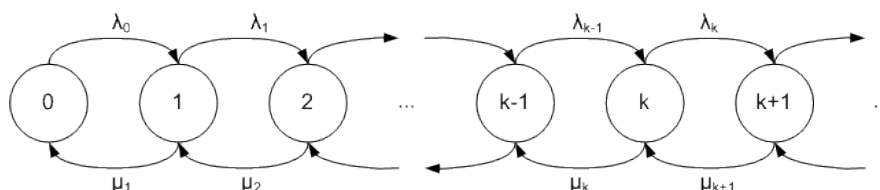
**EXERCICE 4.** Soit un processus de Markov à temps continu,  $(X_t)_{t \geq 0}$ , à valeurs dans  $\{1, 2, 3\}$ , de générateur infinitésimal

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

On suppose que  $X_0 = 1$  et on pose  $T = \min\{t \geq 0 : X_t \neq 1\}$ .

- 1) Donner la loi de  $T$  et  $\mathbb{E}(T)$ .
- 2) Donner la loi de  $X_T$ .
- 3) Déterminer la ou les probabilités invariantes pour  $(X_t)$ .

**EXERCICE 5.** On revient au processus de naissance et de mort vu en cours :



Dans ce qui suit, on considère différentes formes pour  $\lambda_i$  et  $\mu_i$  et on demande de calculer

$$q = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \dots \mu_n}$$

et d'en déduire si le processus admet une loi invariante, ou non, et si oui de donner cette loi.

- 1)  $\lambda_i = \lambda$  et  $\mu_i = \mu$ ,  $\lambda, \mu > 0$ .
- 2)  $\lambda_i = \frac{1}{i+1}$  et  $\mu_i = 1$ .

**EXERCICE 6. Pont brownien, et existence du mouvement brownien.** Soit deux suites  $(\xi_n)_{n \geq 1}$  et  $(\eta_n)_{n \geq 1}$  de variables normales centrées réduites indépendantes, définies sur un même espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . On définit, pour tout entier  $n \geq 1$ , pour tout  $t \in [0, 1]$ ,

$$B_t^{(n)} := \sum_{k=1}^n \frac{\cos(2\pi kt) - 1}{k\pi\sqrt{2}} \xi_k + \sum_{k=1}^n \frac{\sin(2\pi kt)}{k\pi\sqrt{2}} \eta_k.$$

- 1) Soit  $(\alpha_n)_{n \geq 1}$  une suite réelle bornée. Montrer que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{\alpha_n}{n} \xi_n$  converge dans  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .
- 2) En déduire que, pour tout  $t \in [0, 1]$  fixé,  $B_t^{(n)}$  converge dans  $L^2$  vers une variable que l'on notera  $B_t$ .
- 3) On admettra qu'en développant la fonction  $t \mapsto t(1-t)$  en série de Fourier sur  $[0, 1]$  on obtient la relation

$$\sum_{k \geq 1} \frac{\cos(2\pi kt)}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} - \pi^2 t(1-t)$$

(on pourra aussi s'amuser à le démontrer, mais ça n'est pas franchement un exercice de "processus"). En déduire que :

$$\text{Cov}(B_t, B_s) = s \wedge t - st.$$

Un processus gaussien centré sur  $[0, 1]$  ayant pour fonction de covariance  $s \wedge t - st$  sera appelé *pont brownien*. Pourquoi ?

- 4) Montrer que si  $(B_t)_{t \in [0, 1]}$  est un pont brownien,  $(B_{1-t})_{t \in [0, 1]}$  en est un aussi.
- 5) On définit le processus  $(W_s)_{s \in \mathbb{R}_+}$  par

$$W_s = (1+s)B_{\frac{s}{1+s}}.$$

Démontrer que  $(W_s)$  est un mouvement brownien.

- 6) A l'inverse, soit  $(W_s)$  un mouvement brownien. Démontrer que  $U_t = W_t - tW_1$  et  $V_t = (1-t)W_{t/(1-t)}$  pour  $t \in [0, 1]$  sont des ponts browniens.

Remarque : on peut en fait démontrer que la convergence des fonctions  $(B_t^{(n)})$  vers  $(B_t)$  est uniforme p.s., ce qui permet d'établir que  $(B_t)_{t \in [0, 1]}$  et  $(W_s)_{s \in \mathbb{R}_+}$  construites dans les questions 1)-5) sont p.s. continues, mais c'est un peu plus difficile.