
TD N° 3 : Martingales et temps d'arrêts

Exercices 1 et 2 : sur les temps d'arrêt. Exercices suivants : sur le début du chapitre sur les martingales (définitions et propriétés élémentaires, théorème d'arrêt, décomposition de Doob et jusqu'aux inégalités maximales ; pas besoin d'avoir vu les résultats de convergence).

EXERCICE 1. Soit $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une filtration sur un espace mesurable (Ω, \mathcal{F}) . On rappelle que pour tout temps d'arrêt τ , la σ -algèbre \mathcal{F}_τ est définie par

$$A \in \mathcal{F}_\tau \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : A \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n.$$

Soient τ_1 et τ_2 deux temps d'arrêt. Compléter la preuve des propriétés énoncées en cours :

- 1) $\tau_1 + \tau_2$, $\tau_1 \wedge \tau_2$ et $\tau_1 \vee \tau_2$ sont aussi des temps d'arrêt,
- 2) $\tau_1 \leq \tau_2 \Rightarrow \mathcal{F}_{\tau_1} \subset \mathcal{F}_{\tau_2}$,
- 3) $\mathcal{F}_{\tau_1 \wedge \tau_2} = \mathcal{F}_{\tau_1} \cap \mathcal{F}_{\tau_2}$,
- 4) $\{\tau_1 < \tau_2\}, \{\tau_1 = \tau_2\} \in \mathcal{F}_{\tau_1 \wedge \tau_2}$.
- 5) Que peut-on dire sur $\mathcal{F}_{\tau_1 \vee \tau_2}$ et $\mathcal{F}_{\tau_1} \cup \mathcal{F}_{\tau_2}$?

EXERCICE 2. On a vu en cours la version suivante de l'identité de Wald :

Théorème 1. Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, intégrables ou positives, de même espérance. Soit N un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{N}^*}$ définie par $\mathcal{F}_t = \sigma(X_1, \dots, X_t)$. On suppose que $\mathbb{E}(N) < \infty$. Alors

$$\mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^N X_i \right) = \mathbb{E}(N) \mathbb{E}(X_1).$$

Voici une autre version de l'identité de Wald :

Théorème 2. Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, intégrables ou positives, de même espérance. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} , indépendante des (X_i) . On suppose que $\mathbb{E}(N) < \infty$. Alors

$$\mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^N X_i \right) = \mathbb{E}(N) \mathbb{E}(X_1).$$

- 1) Expliquer en quoi les hypothèses du Théorème 1 et du Théorème 2 ne sont pas compatibles, i.e, N ne peut pas être simultanément indépendante des (X_i) et un temps d'arrêt pour $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{N}^*}$ avec $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$, sauf dans le cas trivial où N est constant presque sûrement.
- 2) Démontrer le Théorème 2 (on pourra s'inspirer de la preuve du Théorème 1 vue en cours pour démarrer).

EXERCICE 3. Soit $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une filtration sur un espace mesurable (Ω, \mathcal{F}) .

- 1) Supposons que (X_n) est une sur-martingale pour (\mathcal{F}_n) et que $\mathbb{E}(X_n)$ est une suite constante. Prouver que (X_n) est en fait une martingale.

- 2) Supposons que (M_n) est un processus (\mathcal{F}_n) -adapté, avec M_n intégrable pour tout n . Montrer que

$$(M_n) \text{ martingale} \Leftrightarrow \forall \tau \text{ temps d'arrêt borné, } \mathbb{E}(M_\tau) = \mathbb{E}(M_0).$$

EXERCICE 4. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, positives, d'espérance égale à 1. On pose $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$ pour tout n .

- 1) On pose, pour tout n , $M_n = \prod_{i=0}^n X_i$. Démontrer que (M_n) est une martingale pour (\mathcal{F}_n) .
- 2) On pose, pour tout n , $Y_n = \prod_{i=0}^n \sqrt{X_i}$. Démontrer que (Y_n) est une sur-martingale.

EXERCICE 5. Transformation de martingale. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n), \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré, $X := (X_n)_{n \geq 0}$ une (\mathcal{F}_n) -sous-martingale, $C := (C_n)_{n \geq 0}$ un processus (\mathcal{F}_n) -prévisible. On définit la transformation de martingale de $(X_n)_{n \geq 0}$ par $(\bar{C}_n)_{n \geq 0}$ par le processus $C \cdot X := (C \cdot X)_{n \geq 0}$ tel que

$$(C \cdot X)_0 = 0 \text{ et } \forall n \geq 1, (C \cdot X)_n = \sum_{k=1}^n C_k (X_k - X_{k-1}).$$

- 1) Montrer que si
 - (a) C est positif : $\forall n, C_n \geq 0$,
 - (b) C est majoré : $\exists K > 0, \forall n, |C_n| \leq K$ p.s.
 alors $(C \cdot X)_{n \geq 0}$ est une (\mathcal{F}_n) -sous-martingale.
- 2) Montrer que si C est majoré et X est une (\mathcal{F}_n) -martingale alors $C \cdot X$ est une (\mathcal{F}_n) -martingale.
- 3) Soit τ un (\mathcal{F}_n) -temps d'arrêt et X une (\mathcal{F}_n) -martingale telle que $X_0 = 0$, écrire la martingale arrêtée X^τ comme une transformation de martingale (on rappelle que $X_n^\tau := X_{\tau \wedge n}$).

EXERCICE 6. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées et intégrables définies sur un même espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On pose pour $n \geq 1$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$. On note $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et pour $n \geq 1$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$.

- 1) Supposons que X_1 est centrée et de carré intégrable, montrer que le processus $V := (V_n)_{n \geq 0}$ défini par

$$\forall n \geq 0, V_n = S_n^2 - n\mathbb{E}[X_1^2]$$

est une (\mathcal{F}_n) -martingale. En déduire la valeur de la variation quadratique $\langle S \rangle_n$.

- 2) Supposons que, pour tout réel λ , $\mathbb{E}[e^{\lambda X_1}] < \infty$ et posons, pour tout réel λ , $\phi(\lambda) = \ln \mathbb{E}[e^{\lambda X_1}]$, montrer que le processus $(Z_n^\lambda)_{n \geq 0}$ défini par

$$\forall n \geq 0, Z_n^\lambda = e^{\lambda S_n - n\phi(\lambda)}$$

est une martingale.