
TD N° 4 : Martingales (suite)

EXERCICE 1. Martingales et faillite de société d'assurance. On note Y_n l'actif d'une société d'assurance lors de sa n -ième année d'existence. On suppose que chaque année elle reçoit sous forme de primes un revenu constant noté P . Compte tenu des sinistres qui se réaliseront, et donc des remboursements qu'elle aura à faire, cette société devra verser l'année n une somme C_n à l'ensemble de ses assurés. On aura donc :

$$Y_{n+1} = Y_n + P - C_n.$$

On suppose qu'au moment de la constitution d'une telle société, l'autorité des contrôles des assurances lui impose d'avoir un capital initial Y_0 . On suppose que les C_n sont des variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, de loi commune $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ (normale d'espérance μ et de variance σ^2). Enfin, on note (\mathcal{F}_n) la filtration : $\mathcal{F}_n = \sigma(C_0, \dots, C_{n-1})$. On s'intéresse à la probabilité que cette société fasse faillite au cours de son existence, c'est-à-dire qu'il existe n tel que $Y_n < 0$.

- 1) Commenter les hypothèses précédentes. Justifier en particulier le choix des (C_n) . Quelle hypothèse faites-vous naturellement sur les valeurs relatives de P et μ ?
- 2) Montrer que

$$\mathbb{E} \{ \exp [t(P - C_n)] \} = \exp \left[t(P - \mu) + \frac{\sigma^2 t^2}{2} \right].$$

- 3) Soit $M_n = \exp(t_0 Y_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe une valeur t_0 telle que (M_n) soit une martingale pour (\mathcal{F}_n) , la filtration engendrée par les C_n .
- 4) On définit $Z_n = \min[\exp(t_0 Y_n), 1]$. Montrer que (Z_n) est une sur-martingale pour (\mathcal{F}_n) .
- 5) Soit

$$T = \inf \{ n \in \mathbb{N} : Y_n < 0 \}$$

avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$. Montrer que T est un temps d'arrêt pour (\mathcal{F}_n) .

- 6) En suivant la preuve d'un théorème du cours, montrer que si S est un temps d'arrêt borné et (X_k) une sur-martingale associés à une même filtration, alors

$$\mathbb{E}(X_0) \geq \mathbb{E}(X_S).$$

- 7) Démontrer complètement (sans invoquer un résultat du cours) que

$$\mathbb{E}(Z_0) \geq \mathbb{P}(T \leq m)$$

(on pourra ceci dit s'inspirer de la démonstration d'un théorème du cours en introduisant $S = \min(T, m)$).

- 8) En déduire que la probabilité que la société fasse faillite est majorée par

$$\exp \left[\frac{-2(P - \mu)Y_0}{\sigma^2} \right].$$

- 9) Discuter l'intérêt et les limites d'un tel modèle pour l'autorité de contrôle.

EXERCICE 2. Filtrage. Nous notons $\mathcal{L}(Y|X)$ la loi conditionnelle de Y sachant X .

- 1) Soient $\mu, a, b \in \mathbb{R}$, $U, W \in \mathbb{R}_+^*$ et X et Y deux variables aléatoires telles que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(X) &= \mathcal{N}(\mu, U) \\ \mathcal{L}(Y|X) &= \mathcal{N}(a + bX, W).\end{aligned}$$

Montrer que

$$\mathcal{L}(X|Y) = \mathcal{N}(\hat{X}, V)$$

où $V \in \mathbb{R}_+^*$ et la variable aléatoire \hat{X} sont donnés par :

$$\begin{aligned}\frac{1}{V} &= \frac{1}{U} + \frac{b^2}{W} \\ \frac{\hat{X}}{V} &= \frac{\mu}{U} + \frac{b(Y - a)}{W}.\end{aligned}$$

- 2) En déduire que $\mathbb{E}[(X - \hat{X})^2] = V$.
3) Soient X, η_1, η_2, \dots des variables aléatoires indépendantes telles que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(X) &= \mathcal{N}(0, \sigma^2) \\ \mathcal{L}(\eta_k) &= \mathcal{N}(0, 1).\end{aligned}$$

Soit (c_n) une suite d'éléments de \mathbb{R}_+^* , soit

$$Y_k = X + c_k \eta_k$$

et $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$ et $M_n = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]$. Montrer que (M_n) est une martingale bornée dans L^2 et en déduire les propriétés de convergence de (M_n) vers une variable aléatoire M_∞ .

- 4) Montrer que

$$\mathcal{L}(X|Y_1, \dots, Y_n) = \mathcal{N}(\hat{X}_n, V_n)$$

où

$$\begin{aligned}\frac{1}{V_n} &= \frac{1}{V_{n-1}} + \frac{1}{c_n^2} \\ \frac{\hat{X}_n}{V_n} &= \frac{\hat{X}_{n-1}}{V_{n-1}} + \frac{Y_n}{c_n^2}\end{aligned}$$

et $\hat{X}_0 = 0$ et $V_0 = \sigma^2$.

- 5) Identifier M_n et $\mathbb{E}[(X - M_n)^2]$.
6) Donner une condition nécessaire et suffisante sur la suite (c_k) pour que $M_\infty = X$.

EXERCICE 3. Test du rapport de vraisemblance. Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de densité f par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} . Supposons que $f \in \{p, q\}$ où nous supposons que $p \neq q$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $q(x) > 0$. Le rapport de vraisemblance correspond à la variable aléatoire

$$Y_n = \frac{p(X_1)p(X_2)\dots p(X_n)}{q(X_1)q(X_2)\dots q(X_n)}.$$

Le test du rapport de vraisemblance de $H_0 : f = q$ contre $H_1 : f = p$ correspond à la règle de décision où H_0 est rejetée si $Y_n \geq a$ pour un certain $a > 0$. Dans les questions suivantes la probabilité est celle donnée par H_0 .

- 1) Montrer que (Y_n) est une (\mathcal{F}_n) -martingale où $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$.
- 2) Montrer que (Y_n) converge presque sûrement vers une variable aléatoire Y_∞ .
- 3) Montrer que $Y_\infty = 0$ p.s. Conclure en la convergence du test du rapport de vraisemblance.
- 4) La martingale (Y_n) converge-t'elle dans L^1 ?
- 5) Donner une majoration de $\mathbb{P}(\exists n \geq 1 : Y_n \geq a)$.

EXERCICE 4. Soit une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Soit une martingale réelle (M_n) avec $|M_n| \leq K$. On pose

$$X_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} (M_k - M_{k-1}).$$

Montrer que $(X_n)_{n \geq 1}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ martingale qui converge p.s. et dans L^2 .