

---

TD N° 1 : Espérance conditionnelle et rappels de probabilités

---

Ce TD porte essentiellement sur les rappels sur l'espérance conditionnelle vus dans l'introduction du cours. Il y a également un exercice sur les notions de convergence en probabilité, qui permettra un petit rappel sur le sujet.

On rappelle la notation  $x \vee y = \max\{x, y\}$  et  $x \wedge y = \min\{x, y\}$ . On rappelle également le résultat important suivant : soit  $X$  une variable aléatoire réelle, toute variable aléatoire  $\sigma(X)$ -mesurable  $Y$  s'écrit sous la forme  $Y = h(X)$  où  $h$  est fonction borélienne.

**EXERCICE 1.** Soit  $X$  une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , avec  $\mathbb{E}(X^2) < \infty$ , et soit  $\mathcal{A}$  une sous-algèbre de  $\mathcal{F}$ . On pose  $Y = \mathbb{E}(X|\mathcal{A})$ .

- 1) Démontrer que  $0 \leq \mathbb{E}(Y^2) \leq \mathbb{E}(X^2)$ .
- 2) Démontrer que  $\mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{E}(X^2) \Rightarrow X = Y$  p.s.
- 3) Ce résultat reste-t'il vrai si  $\mathbb{E}(X^2) = \infty$  ?

**EXERCICE 2.** On considère un vecteur  $X = (X_1, X_2)$  de densité (par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^2$ ) :

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{x_1}} & 0 \leq x_2 \leq x_1 \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- 1) Calculer la densité marginale de  $X_1$ , de  $X_2$ . Calculer  $\mathbb{E}(X_1)$ .
- 2) Déterminer une densité conditionnelle de  $X_2|X_1 = x_1$ , et en déduire la valeur de  $\mathbb{E}(X_2|X_1 = x_1)$  et de  $\mathbb{E}(X_2|X_1)$ .
- 3) Est-ce que  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendantes ?

**EXERCICE 3.** Soit  $T$  une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1 et  $X$  une variable aléatoire qui, conditionnellement à  $T$ , suit une loi gaussienne d'espérance 0 et de variance  $1/T$ . Autrement dit,  $T \sim \mathcal{E}(1)$  et  $X|T \sim \mathcal{N}(0, 1/T)$ .

- 1) Déterminer la densité de  $X$ .
- 2) Quelle est la loi de  $T$  conditionnellement à  $X$  ?
- 3) Calculer  $\mathbb{E}(T|X)$ .

**EXERCICE 4.** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur  $[0, 1]$ . Calculer  $\mathbb{E}[Y|X \vee Y]$  et  $\mathbb{E}[Y|X \wedge Y]$ .

**EXERCICE 5.** Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, de loi exponentielle de paramètre  $\alpha$  et  $N$  une variable aléatoire, indépendante de la suite  $(X_n)_{n \geq 1}$ , de loi géométrique de paramètre  $p$ . On pose, pour  $n \geq 1$ ,

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

Calculer  $\mathbb{E}(S_N|N)$  et  $\mathbb{E}(N|S_N)$ .

**EXERCICE 6.** Quelques révisions sur les différentes notions de convergences de variables aléatoires :

- 1) Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de v.a. réelles avec  $|X_n| \leq c$  p.s.
  - i) Montrer que si  $(X_n)$  converge en probabilité alors elle converge aussi dans  $L^p$  pour tout  $p \geq 1$ .
  - ii) Proposer un contre-exemple qui montre que si l'hypothèse de bornitude n'est pas satisfaite, le résultat précédent ne tient plus.
- 2) Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de v.a. réelles i.i.d. avec  $\mathbb{E}(X_1) = 0$  et  $\mathbb{E}(X_1^2) = \sigma^2 < \infty$ . On pose

$$Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i.$$

- i) (Facile). Rappeler pourquoi  $(Y_n)$  converge en loi et donner la loi limite.
  - ii) (Plus difficile, facultatif). Démontrer que  $(Y_n)$  ne converge pas en probabilité.
- 3) (Plus difficile, facultatif). Soit  $(X_n)$  une suite de variables aléatoires réelles de densités respectives  $f_n$  et  $X$  une v.a.r. de densité  $f$ .
  - i) Montrer que si  $f_n \rightarrow f$  presque partout alors  $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$  (convergence en loi). Indication : montrer en fait  $f_n \rightarrow f$  p.p.  $\Rightarrow f_n \xrightarrow{L_1} f \Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ .
  - ii) Montrer que la réciproque est fausse. Indication : poser  $f_n(x) = [1 - \varphi(nx)]\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$  pour  $\varphi$  bien choisie.